

2018年天津和平区文科高三一模数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

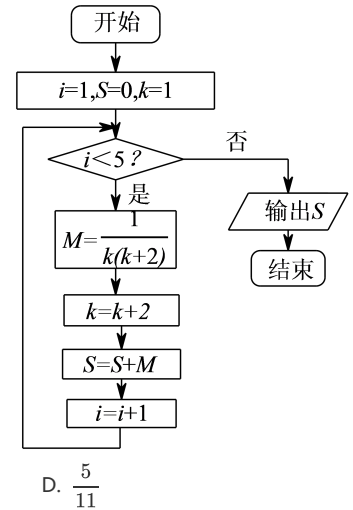
1. 设集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x | 2 < x \leq 4\}$, 则 $A \cap \complement_{\mathbb{R}} B$ 等于 ().

- A. $\{2, 3, 4\}$ B. $\{1, 2, 4, 5\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3, 5\}$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x - 2y + 4 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \geq 0 \\ 3x - y - 3 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = x + 2y$ 的最大值是 ().

- A. 8 B. 7 C. 4 D. 1

3. 阅读右边的程序框图, 运行相应的程序, 则输出的 S 的值为 ().



- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $\frac{5}{11}$

4. 函数 $f(x) = \cos x(\sin x - \cos x) + 1$ 的最小正周期和最大值分别为 ().

- A. 2π 和 1 B. π 和 2 C. π 和 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ D. 2π 和 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

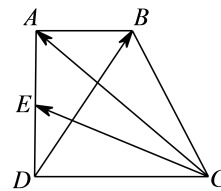
5. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则 " $|x+2| + |x-1| \leq 5$ " 是 " $-2 \leq x \leq 3$ " 的 ().

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{3}{2}$, 过右焦点 F 作渐近线的垂线, 垂足为 M , 若 $\triangle FOM$ 的面积为 $\sqrt{5}$, 其中 O 为坐标原点, 则双曲线的方程为 ().

- A. $x^2 - \frac{4y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{2y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ D. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$

7. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, $AD = DC = 2AB$, E 为 AD 的中点, 若 $\overrightarrow{CA} = \lambda \overrightarrow{CE} + \mu \overrightarrow{DB}$, 则 $\lambda + \mu$ 的值为 ().



- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. 2 D. $\frac{8}{3}$

8. 若曲线 $y = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ \frac{2}{1-x}, & x > 1 \end{cases}$ 与直线 $y = kx - 1$ 有两个不同的交点, 则实数 k 的取值范围是 ().

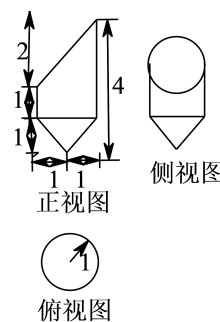
- A. $(5 - 2\sqrt{6}, 5 + 2\sqrt{6})$ B. $(0, 5 - 2\sqrt{6})$
C. $(-\infty, 5 - 2\sqrt{6})$ D. $(-\infty, 0) \cup (0, 5 - 2\sqrt{6})$

二、填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 设 i 是虚数单位, a 为实数, 若复数 $a + \frac{10}{3+i}$ 是纯虚数, 则 $a =$ _____.

10. 直线 $x - y = 1$ 被圆 $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ 截得的弦长为 _____.

11. 已知一个几何体的三视图如右图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积为 _____ cm^3 .



12. 已知定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数 $y = f(x)$ 又是减函数, 且 $f(a - 1) + f(3 - a^2) < 0$, 则 a 的取值范围是 _____.

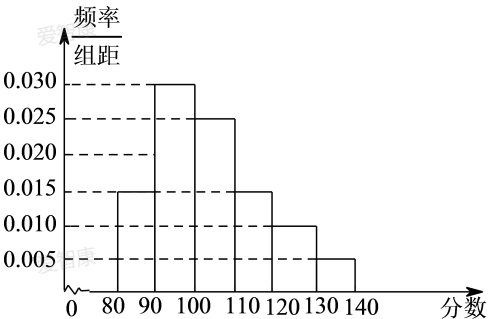
13. 已知 $a > 0$, $b > 0$, $a + b = m$, 其中 m 为常数, 则 $y = \frac{4}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 _____.

14. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上满足 $f(-x) = f(x)$, 且当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2$, 函数 $g(x) = \left| \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) \right|$, 则函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的零点个数为 _____.

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

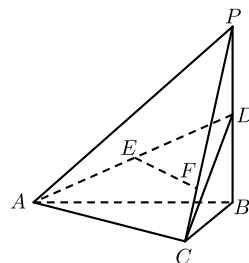
15. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 为三个内角，已知 $A = 45^\circ, \cos B = \frac{4}{5}$.
- (1) 求 $\sin C$ 的值.
- (2) 若 $BC = 10, D$ 为 AB 的中点，求 CD 的长及 $\triangle ABC$ 的面积.

16. 某校从参加区高三模拟考试的学生中随机抽取60名学生，将其数学成绩（均为整数）分成6段 $[80, 90), [90, 100), \dots, [130, 140)$ 后得到相应的频率分布直方图（如右图），观察图形的信息，回答下列问题：



- (1) 求分数在 $[100, 110)$ 内的人数.
- (2) 统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值作为代表，据此估计本次考试的平均分.
- (3) 用分层抽样的方法在分数段为 $[80, 100)$ 的学生中抽取一个容量为6的样本，将该样本看成一个总体，从中任取2人，求至多1人在分数段 $[90, 100)$ 内的概率.

17. 如图, 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PB \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$, $PB = 2$, $AB = 2\sqrt{2}$, D 为 PB 的中点, E 为 AD 的中点, 点 F 在线段 PC 上, 且 $PF = 3FC$.



- (1) 求证: $AC \perp CD$.
- (2) 求证: $EF \parallel$ 平面 ABC .
- (3) 若 $BC = \sqrt{2}$, 求二面角 $C-AD-B$ 的度数.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数, 其前 n 项和 S_n 满足 $S_n = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_n - 3)(n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 是公差为正数的等差数列, 且 $b_2 = 5, b_1, b_3, b_{11}$ 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{1}{a_n(2b_n - 1)}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, $x \in (0, e]$, 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极值点, 求 $f(x)$ 的单调区间和最大值.

(2) 是否存在实数 a , 使得 $f(x)$ 的最大值是 -3 ? 若存在, 求出 a 的值; 若不存在, 说明理由.

(3) 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, e]$, 在 (1) 条件下, 求证: $f(x) + g(x) + \frac{1}{2} < 0$.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$, 以原点为圆心, 椭圆的短半轴长为半径的圆与直线 $y = x + \sqrt{6}$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的方程.

(2) 若 A, B 为椭圆 C 上关于 x 轴对称的任意两点, P 点坐标为 $(4, 0)$, 连接 PB 交椭圆 C 于另一点 D , 求证: 直线 AD 恒过 x 轴上的定点.

(3) 在 (2) 的条件下, 设 x 轴上的定点为 M , 若 AB 过椭圆 C 的左焦点, 求 $\triangle ABM$ 的面积.